Сохоцкий-Племель формулалары

Коши типтес интегралдың күйін интегралдау контурында зерттейік. Біз кейін алатын негізгі нәтиже ол Гельдер шартын қанағаттандыратын тығыздығы бар Коши типтес интеграл дәл үзіліссіз тығыздығы бар екі қабатты потенциал(потенциал двойного слоя) сияқты әсер етеді, яғни контурға оның әр жағынан жақындағанда үзіліссіз шектік мәндері бар, бірақ бұл шектік мәндер әр түрлі, сол себепті контур арқылы өткенде секіріс орын алады. Бірінші негізгі лемманы қарастырайық.

Негізгі лемма. *Егер* $\varphi(\tau)$ *тығыздығы Гельдер шартын қанағаттандырса және* t *нүктесі тегіс* L *контур ұштарымен сәйкес болмаса, онда*

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau \qquad (24)$$

функциясы, контурдың $z=t$ *нүктесі арқылы өткенде үзіліссіз функция секілді өтеді, яғни* z – t*-ға контурдың кез-келген жағынан кез-келген жол(путь) бойынша жақындағанда оның анықталған шектік мәні бар:*

$$\lim_{z\to t}\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}d\tau=\psi(t).$$

Дәлелдеуді [1]-де таба аласыздар.

Коши типтес интегралды қарастырайық

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau, \qquad (25)$$

мұндағы $\varphi(\tau)$ Гельдер шартын қанағаттандырсын. L-дегі (25) мәнін

$$\Phi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

арқылы белгілейік. Мұнда ерекше интеграл Коши бойынша бас мән ретінде түсініледі.

L контурын тұйық және тегіс деп алайық, егер контур тұйық емес болған жағдайда, біз оны бір қисық арқылы тұйыққа дейін толтырамыз, және ол қосымша қисықта $\varphi(\tau)=0$ деп аламыз.

$\Phi(z)$-тің контурдың бір t нүктесіндегі шектік мәндерін зерттеу үшін (24) функциясын алайық. $\Phi^{+}(t)$, $\Psi^{+}(t)$ арқылы аналитикалық $\Phi(z)$, $\psi(z)$ функцияларының z нүктесінің t-ға L ішінен ұмтылғандағы шектік мәндерін арқылы, ал сыртынын ұмтылғанда шеттік мәндерін $\Phi^{-}(t)$, $\Psi^{-}(t)$ арқылы белгілейік(Тұйық емес контур үшін бұл оң және сол жақтан шектің мәніне сәйкес). Шек ұмтылуының бағытын белгілеу үшін сәйкесінше $z \to t^{+}$ немесе $z \to t^{-}$ деп белгілейміз. Контурды t нүктесіндегі функциялардың сәйкес мәндерін жай ғана $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ деп белгілейміз. $\varphi(t)$, $\Phi(t)$ және $\Phi^{\pm}(t)$ арасындағы байланысты табайық.

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 2\pi i, & z \in D^{+} \\ 0, & z \in D^{-} \\ \pi i, & z \in L \end{cases} \tag{26}$$

теңдігінен

$$\Psi^{+}(t) = \lim_{z \to t^{+}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right] = \Phi^{+}(t) - \varphi(t),$$

$$\Psi^{-}(t) = \lim_{z \to t^{-}} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - z} \right] = \Phi^{-}(t),$$

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \frac{\varphi(t)}{2\pi i} \int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t),$$

аламыз. Негізгі лемма бойынша $\Psi(t)$ функциясы үзіліссіз, онда жазылған теңдіктердің оң бөліктері сәйкес, яғни

$$\Phi^{+}(t) - \varphi(t) = \Phi^{-}(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t). \tag{27}$$

Бұдан алатынымыз

$$\Phi^{+}(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau,$$

$$\Phi^{-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau. \qquad (28)$$

(28)-дегі формулаларды қосып және айырымын алсақ, оларға теңбе-тең

$$\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t) = \varphi(t), \qquad (29)$$

$$\Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \qquad (30)$$

формулаларын аламыз.

Алынған нәтижелерді теорема ретінді тұжырымдайық.

Теорема. L – тегіс контур болсын(тұйық немесе тұйық емес) және $\varphi(\tau)$ – контур нүктелерінің функциясы болсын және Гельдер шартын қанағаттандыратын. Онда

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

Коши типтес интегралының L контурының барлық нүктелерінде шектік $\Phi^{+}(t), \Phi^{-}(t)$ мәндері бар, ол мәндер контурға оң жақтан немесе сол жақтан кез-келген жол бойынша жақындағанда контур ұштарымен сәйкес емес, және бұл шектік мәндер интегралдың $\varphi(t)$ тығыздығы және ерекше $\Phi(t)$ интегралы арқылы (28), (29), (30) Сохоцкий-Племель формулалары бойынша өрнектеледі.

Алдында көрсетілгендей

$$\Phi^{-}(\infty) = 0 \qquad (31)$$

шарты бөлікті-аналитикалық функцияны Коши типтес интеграл арқылы берілуі үшін қажетті шарт екендігін көрсетілді. . Ол шарттың жеткілікті екендігін де шығару қиын емес. Шыныменде, $\Phi^{\pm}(t)$ – Гельдер шартын қанағаттандыратын бөлікті-аналитикалық функцияның шеттік мәні болсын. Онда Коши типтес интегралдың тығыздығын $\varphi(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t)$ түрінде алсақ, (3), (4) формулалары арқылы (31) шартты ескере отырып

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases}\Phi^{+}(z), & z \in D^{+}, \\ \Phi^{-}(z), & z \in D^{-},\end{cases}$$

аламыз.

Кез-келген комплекс функция облыстағы аналитикалық функцияның шеттік мәні болатындығының шарты

$\varphi(\tau)$ тығыздығы Гельдер шартын қанағаттандыратын

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau,$$

Коши типтес интеграл қарастырайық. Егер $z\in D^+$ және $\varphi(t)$ – D^+-та аналитикалық функцияның шеттік мәні болса, онда

$$\Phi^+(z)=\varphi(z);$$

Егер $z\in D^-$ және $\varphi(t)$ – D^--та аналитикалық функцияның шеттік мәні болса, онда шексіз облыст үшін Коши формуласы бойынша

$$\Phi^-(z)=-\varphi(z)+\varphi(\infty).$$

L контурында шеттік мәндерге көшіп және (28) Сохоцкий-Племель формулаларын қолдансақ

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\,,$$

егер $\varphi(z)$ – D^+ аналитикалық, және

$$-\varphi(t)+\varphi(\infty)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau\,,$$

егер $\varphi(z)$ – D^- аналитикалық. Бұдан

$$-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=0, \qquad (32)$$

$$\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\Gamma=0 \quad (\Gamma=\varphi(\infty)). \qquad (33)$$

(32) және (33) шарттары – сәйкесінше D^+ және D^- облыстарында $\varphi(t)$ функциясы аналитикалық функцияның шеттік мәндері болуы үшін қажетті шарт. Олар әрі жеткілікті болатынын көрсету оңай.

Шыныменде, мысалы, $\varphi(t)$ (32) шартты қанағаттандырсын. Коши типтес

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

интегралы үшін (28) Сохоцкий-Племель формулалары бойынша, бұл $\Phi^-(t)=0$ дегенді білдіреді, онда (29) формуладан алатынымыз

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\Phi^+(t).$$

Алынған нәтижені теорема түрінде тұжырымдайық.

Теорема. Тұйық тегіс L контурында Гельдер шартын қанағаттандыратын $\varphi(t)$ функциясы берілсін. Бұл функция – ішкі D^+ облысында аналитикалық функцияның шеттік мәні болу үшін (32) шарт орындалуы қажетті және жеткілікті, $\varphi(t)$ функциясы – сыртқы D^- облысында аналитикалық және шексіздікте берілген Γ санына айналатын функцияның шеттік шарты болуы үшңн (33) шарт орындалуы қажетті және жеткілікті.

Жалпылырақ есепті де қойсақ болады: контурда берілген комплекс функция – облыстағы аналитикалық, берілген қасиеттері бар бөлек нүктелерден басқа жерде, функцияның шеттік мәні болатындай шартты шығару.

Енді $\varphi(t)$ – D^- облысында аналитикалық, негізгі бөлігі берілген

$$\gamma(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n,$$

n ретті полюсі бар шексіз алыс нүктелерден басқа жерде, функцияның шеттік мәні болсын.

Γ тұрақтысы $\gamma(t)$ мәніне ауысатындай шарт (33) түрінде болатынын көрсетсе болады, яғни

$$\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\gamma(t)=0. \qquad (34)$$

Кей жағдайда (32), (33) формулаларын, контурда берілген комплекс функцияның облысқа аналитикалық жалғастыруының шарты деп атайды. Бірақ аналитикалық жалғастыру терминін облыстың барлық нүктесіндегі аналитикалық функцияға қатысты ғана емес, сондай-ақ осы облыстың кей нүктелерінде ерекшеліктері бар функциялар үшін де қолданылады. Бұл функциялар үшін (32), (33) шарттарын қиынырақ шартқа ауыстыру керек.

Коши типтес интегралды және ерекше интегралды дифференциалдау

$\varphi(t)$ – m-ретті туындысы Гельдер шартын қанағаттандыратын тұйық L контур нүктелерінің функциясы болсын. Енді Коши типтес интегралмен анықталатын

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

$\Phi(z)$ функциясының m-ретті туындысының контурда шектік мәндері бар екендігін және ол шектік мәндер (28) Сохоцкий-Племель формулаларымен сәйкес келетін қатынастарды қанағаттандыратынын көрсетейік:

$$\Phi^{(m)^+}(t) = \frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - t}d\tau, \tag{35}$$

$$\Phi^{(m)^-}(t) = -\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - t}d\tau. \tag{36}$$

Коши типтес интегралдың m-ретті туындысы

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{(\tau - z)^{m+1}}d\tau$$

формуласы арқылы өрнектеледі.

Оң жақтағы интегралды m рет бөліктеп интегралдайық. Контурдың тұйық болуынан интегралданған бөлік үнемі нөлге айналатынын болатынын аламыз. Сол себепті:

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - z}d\tau. \tag{36}$$

Алынған Коши типтес интегралға (28) формуланы қолдансақ, (35), (36) формулаларға келеміз.

Енді (35) және (36) формулалардағы дифференциалдау және контурда шекке көшу операцияларының орын ауыспалы екендігін көрсетейік, яғни егер $\varphi^{(m)}(t)$ тығыздығы Гельдер шартын қанағаттандырса, Коши типтес интегралдың туындысының контурдағы шектік мәні, оның шектік мәнінің туындысымен сәйкес:

$$\left[\Phi^{(m)}(t)\right]^{\pm}=\left[\Phi^{\pm}(t)\right]^{(m)}.$$

Бірінші туындыны қарастыру жағдайымен шектелейік. Бірінші

$$\Phi'(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t}d\tau \qquad (38)$$

болатындығын көрсетейік. (23) формула бойынша

$$\Phi'(t)=\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\varphi(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau].$$

Интегралды қосылғышты дифференциалдасақ, онда

$$\frac{d}{dt}\int_L\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau=\lim_{\delta\to 0}\frac{d}{dt}\int_{L-L_\delta}\varphi'(\tau)\ln(\tau-t)d\tau=$$

$$=\lim_{\delta\to 0}[-\int_{L-L_\delta}\frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t}d\tau+\varphi'(t_2)\ln(\tau-t_2)-\varphi'(t_1)\ln(\tau-t_1)]=$$

$$=-\int_{L-L_\delta}\frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t}d\tau+\lim_{\delta\to 0}\left[\varphi'(t_2)-\varphi'(t_1)\right]\ln(\tau-t_2)+$$

$$+\lim_{\delta\to 0}\varphi'(t_1)\left[\ln(\tau-t_2)-\ln(\tau-t_1)\right]. \qquad (39)$$

Мұндағы L_δ – L контурының центрі t нүктесінде ал радиусы δ болатын шеңбердің ішінде жатқан бөлігі.

$\varphi'(t)$ Гельдер шартын қанағаттандыратындықтан, онда қалып қалған бірінші шек нөлге тең, ал екіншісі $\pi i\varphi'(t)$-ға тең. Сол себепті (39)-дан алатынымыз

$$\Phi'(t) = \frac{1}{2}\varphi'(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{1}{2}\varphi'(t),$$

және осылай (38)-ді дәлелдейміз.

$\left[\Phi'(t)\right]^{\pm} = \left[\Phi^{\pm}(t)\right]'$ теңдігі (38)-ден тікелей Сохоцкий-Племель формулалаларын қолдану арқылы шығады.